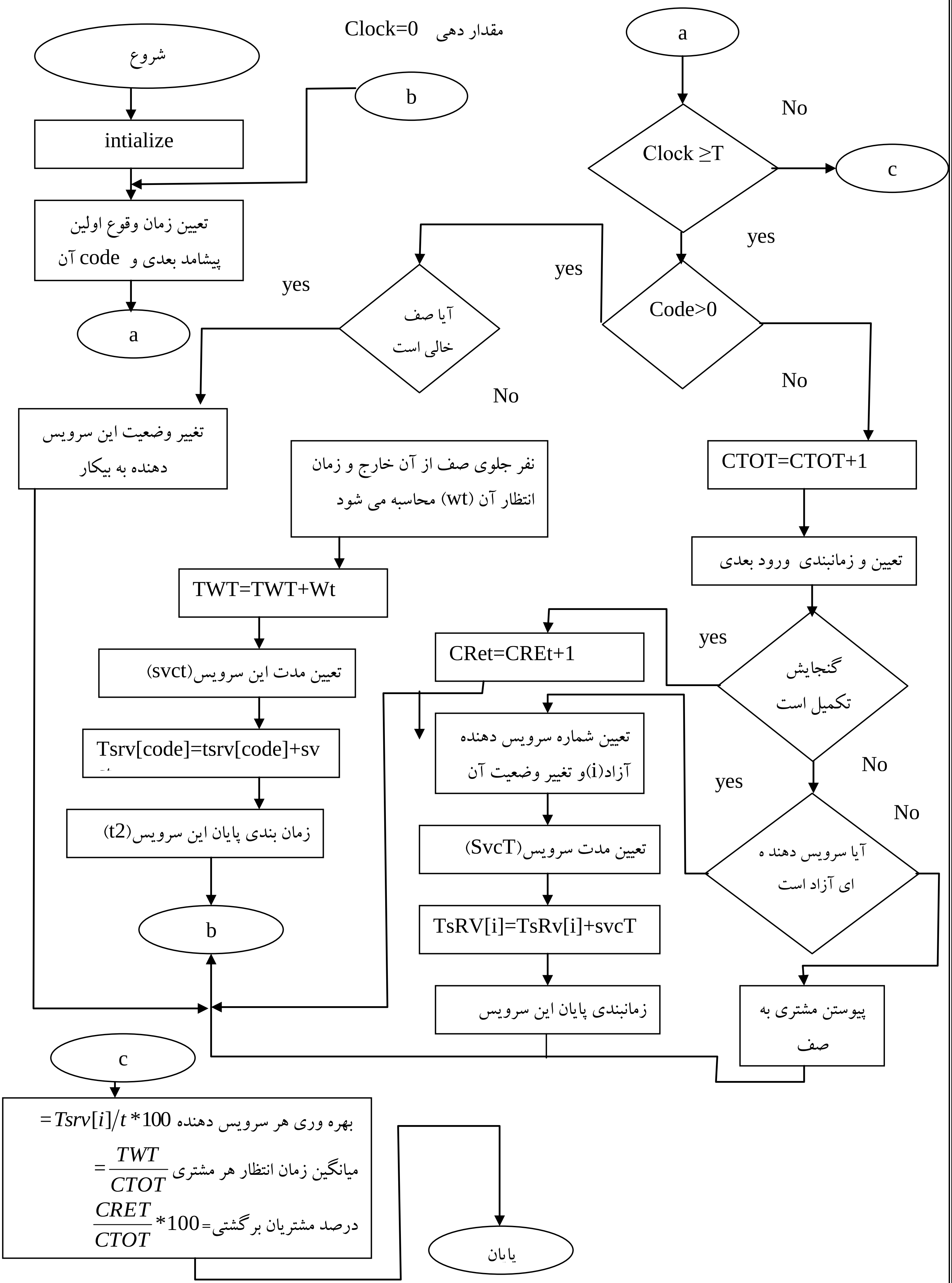
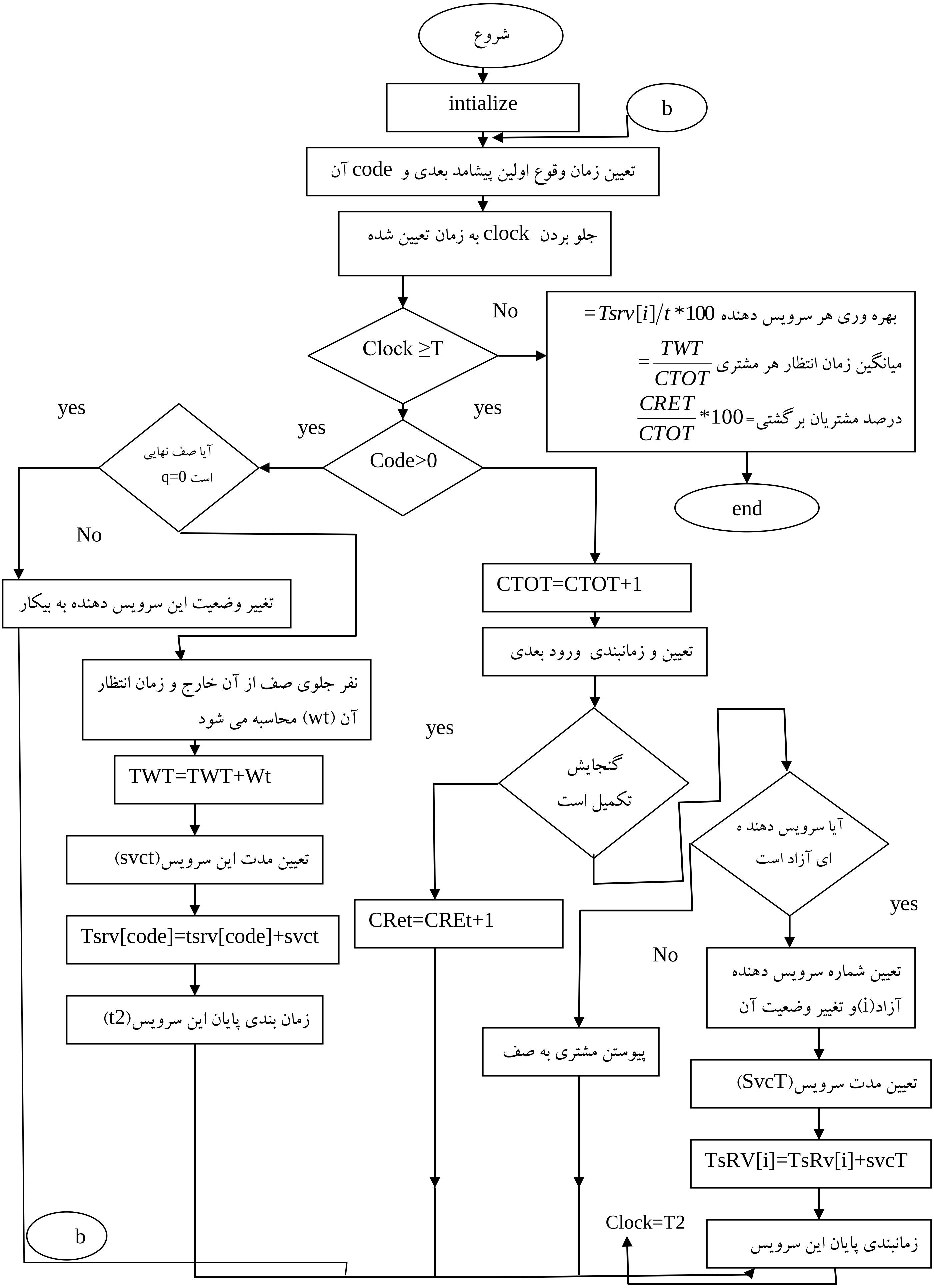
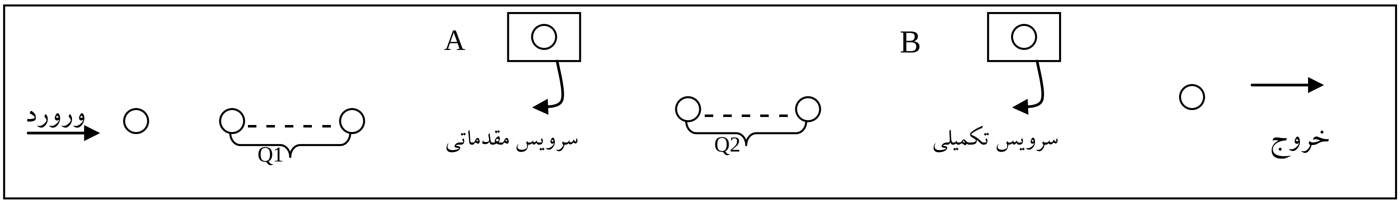

مقدار دهی Clock=0
شروع
intialize
b
تعیین زمان وقوع اولین پیشامد بعدی و code آن
a
a
Clock ≥T
No
c
yes
Code>0
yes
آیا صف خالی است
yes
No
No
تغییر وضعیت این سرویس دهنده به بیکار
نفر جلوی صف از آن خارج و زمان انتظار آن (wt) محاسبه می شود
CTOT=CTOT+1
TWT=TWT+Wt
تعیین و زمانبندی ورود بعدی
CRet=CREt+1
yes
گنجایش تکمیل است
تعیین مدت این سرویس(svct)
Tsrv[code]=tsrv[code]+sv
تعیین شماره سرویس دهنده آزاد(i)و تغییر وضعیت آن
No
yes
No
آیا سرویس دهند ه ای آزاد است
زمان بندی پایان این سرویس(t2)
تعیین مدت سرویس(SvcT)
TsRV[i]=TsRv[i]+svcT
b
پیوستن مشتری به صف
زمانبندی پایان این سرویس
c
بهره وری هر سرویس دهنده 100* Tsrv[i]/t=
میانگین زمان انتظار هر مشتری TWT/CTOT =
درصد مشتریان برگشتی= 100* CRET/CTOT
یابان


شروع
intialize
b
تعیین زمان وقوع اولین پیشامد بعدی و code آن
جلو بردن clock به زمان تعیین شده
Clock ≥T
No
بهره وری هر سرویس دهنده $Tsrv[i]/t*100=$
میانگین زمان انتظار هر مشتری $=\frac{TWT}{CTOT}$
درصد مشتریان برگشتی $=100*\frac{CRET}{CTOT}$
end
yes
Code>0
yes
آیا صف نهایی q=0 است
yes
No
تغییر وضعیت این سرویس دهنده به بیکار
نفر جلوی صف از آن خارج و زمان انتظار آن (wt) محاسبه می شود
TWT=TWT+Wt
تعیین مدت این سرویس(svct)
Tsrv[code]=tsrv[code]+svct
زمان بندی پایان این سرویس(t2)
CTOT=CTOT+1
تعیین و زمانبندی ورود بعدی
yes
گنجایش تکمیل است
CRet=CREt+1
آیا سرویس دهند ه ای آزاد است
No
yes
پیوستن مشتری به صف
تعیین شماره سرویس دهنده آزاد(i)و تغییر وضعیت آن
تعیین مدت سرویس(SvcT)
TsRV[i]=TsRv[i]+svcT
زمانبندی پایان این سرویس
Clock=T2
b

مثال کاربردی (سیستم دو سرویس دهنده متوالی و مکمل)



فرض کنید یک مشتری وارد سیستم شده و توسط سرویس دهنده **A** سرویس می گیرد بعد از پایان این سرویس به سرویس دهنده **B** مراجعه کند و سرویس تکمیلی را از آن دریافت کند سپس سیستم را ترک کند. این سیستم را برای مدت ۸ ساعت یا ۴۸۰ دقیقه شبیه سازی کنید. با این فرض که زمان ورود مشتری ها به این سیستم دارای تابع توزیع یکنواخت یا uniform بین ۵ تا ۱۰ دقیقه است.در ضمن زمان سرویس دهی توسط سرویس دهنده **A** از نوع یکنواخت یا uniform بین ۶ تا ۱۱ دقیقه و نیز زمان سرویس دهی توسط سرویس دهنده **B** با همان تابع توزیع بین ۱۱ تا ۱۵ دقیقه می باشد.

برای مدل بندی این سیستم توجه به نکات زیر ضروری است :

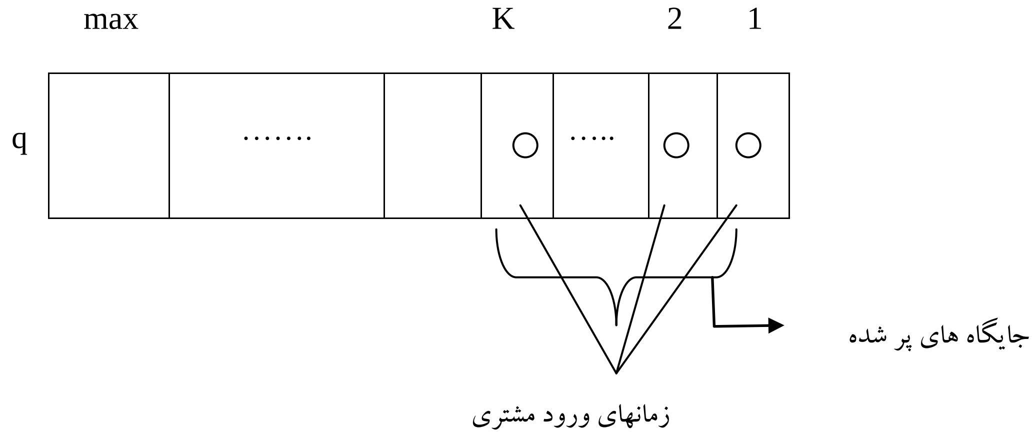
۱) هر یک از صفوف اشاره شده را می توانیم با یک آرایه یک بعدی با حداکثر طول ممکن (آرایه q) در نظر بگیریم. زمان ورود مشتری را در اولین خانه خالی آرایه قرار می دهیم که اندیس آن خانه نشان دهنده شماره نوبت مشتری مورد نظر است.پس از خارج شدن یک مشتری از صف و وارد شدن او به یکی از سرویس دهنده ها کلیه داده های موجود در آرایه را یک خانه به جلو shift میدهیم.

۲) در این سیستم پیشآمدهای اصلی عبارتند از:

الف) پیشآمد ورود یک مشتری به سیستم

ب) پیشآمد پایان سرویس از سرویس دهنده **A**

ج) پیشآمد پایان سرویس از سرویس دهنده **B**



متغیرهای لازم برای رسم مدل:

متغیرها	شرح	مقدار اولیه
Clock	ساعت شبیه سازی	۰
T	مدت کل شبیه سازی	۴۸۰ دقیقه
Q1[]	صف سرویس دهنده ی A	۰
Q2[]	صف سرویس دهنده یB	۰
sA	وضعیت سروس دهنده A	۰
sB	وضعیت سروس دهنده B	۰

جدول زمانبندی پیشامد ها:

	0	1	2
Tne			

زمان ورود اولین مشتری بعدی

زمان پایان سرویس همان مشتری از سرویس دهنده A

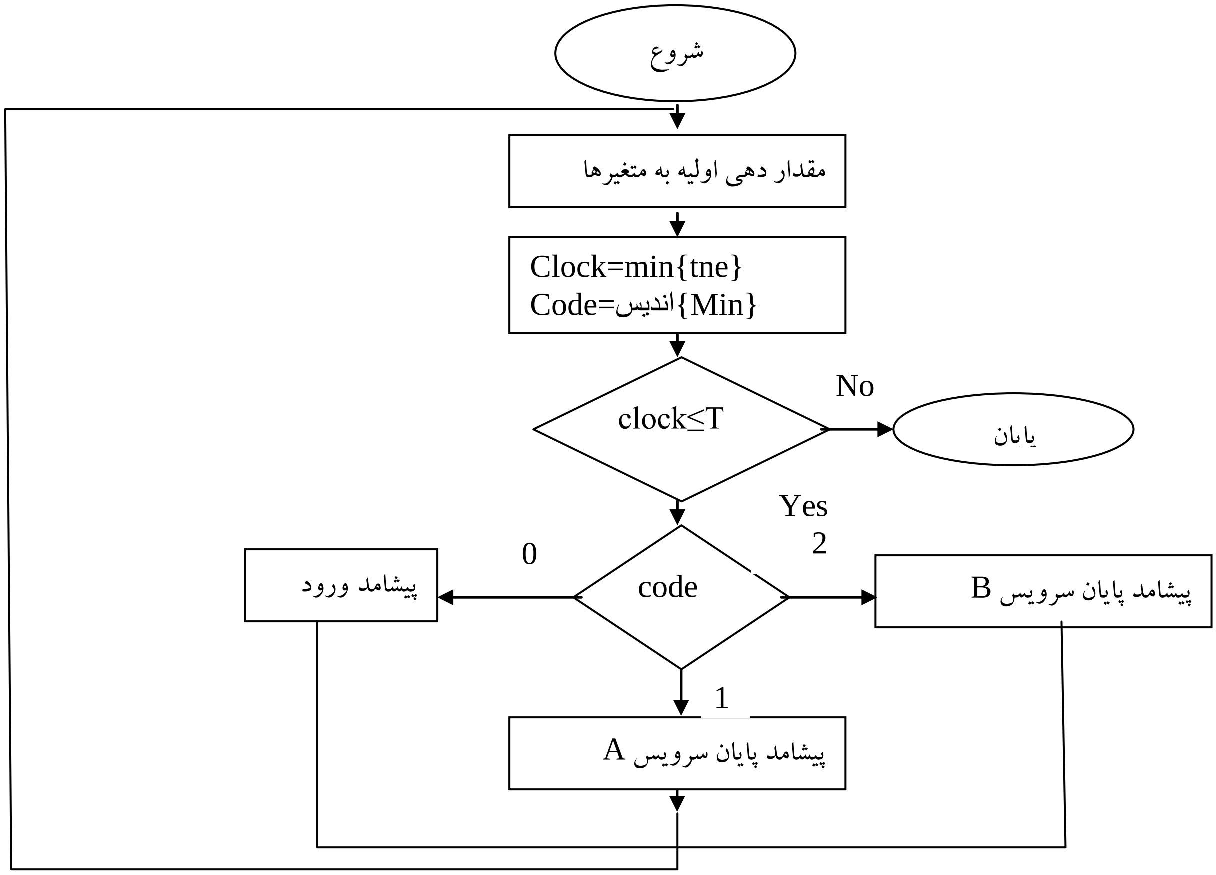
زمان پایان سرویس همان مشتری از سرویس دهنده B

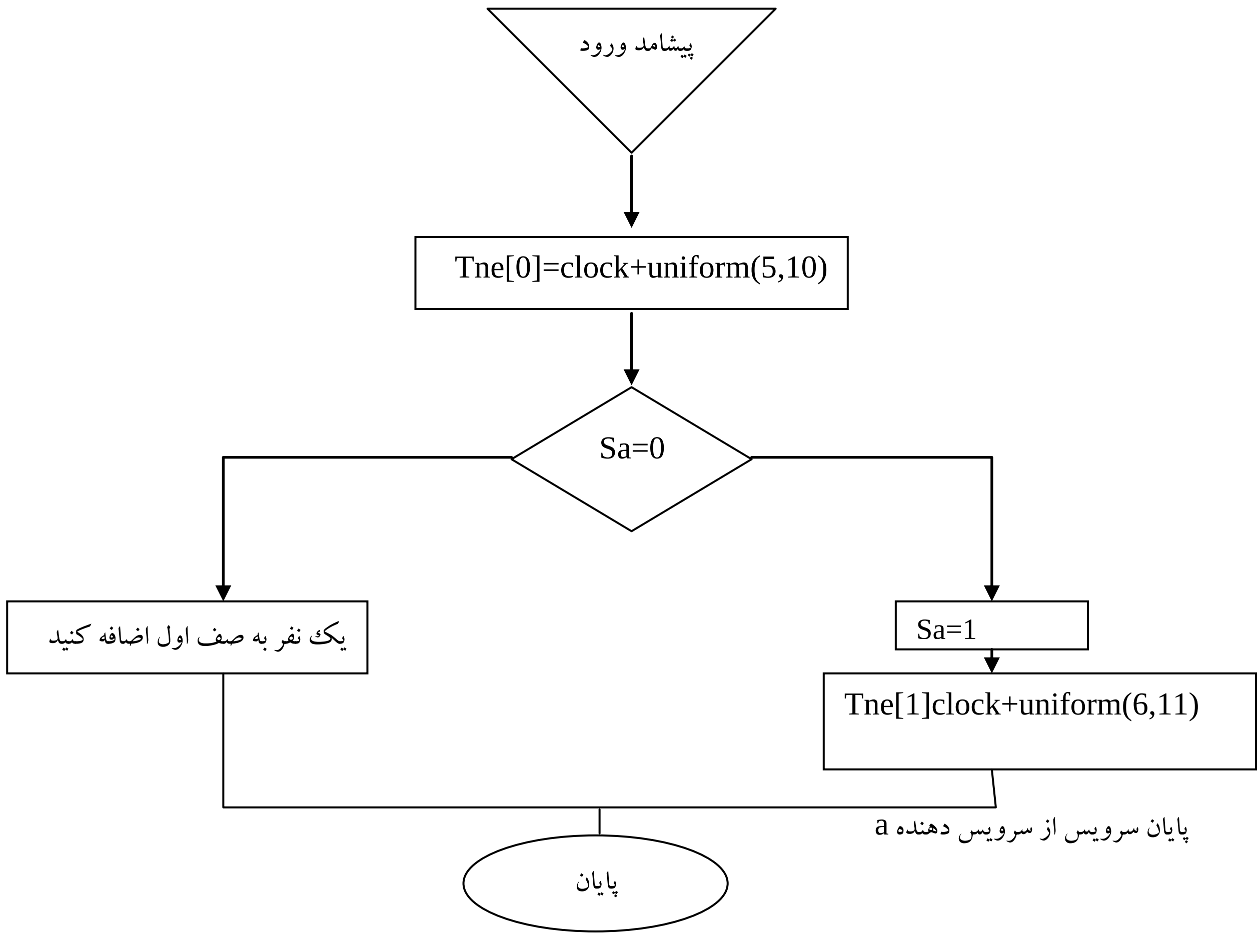
Code   کد نوع پیشامد
- ۰ : ورود اولین مشتری به سیستم
- ۱ : پایان سرویس دهنده A
- ۲ : پایان سرویس دهنده B

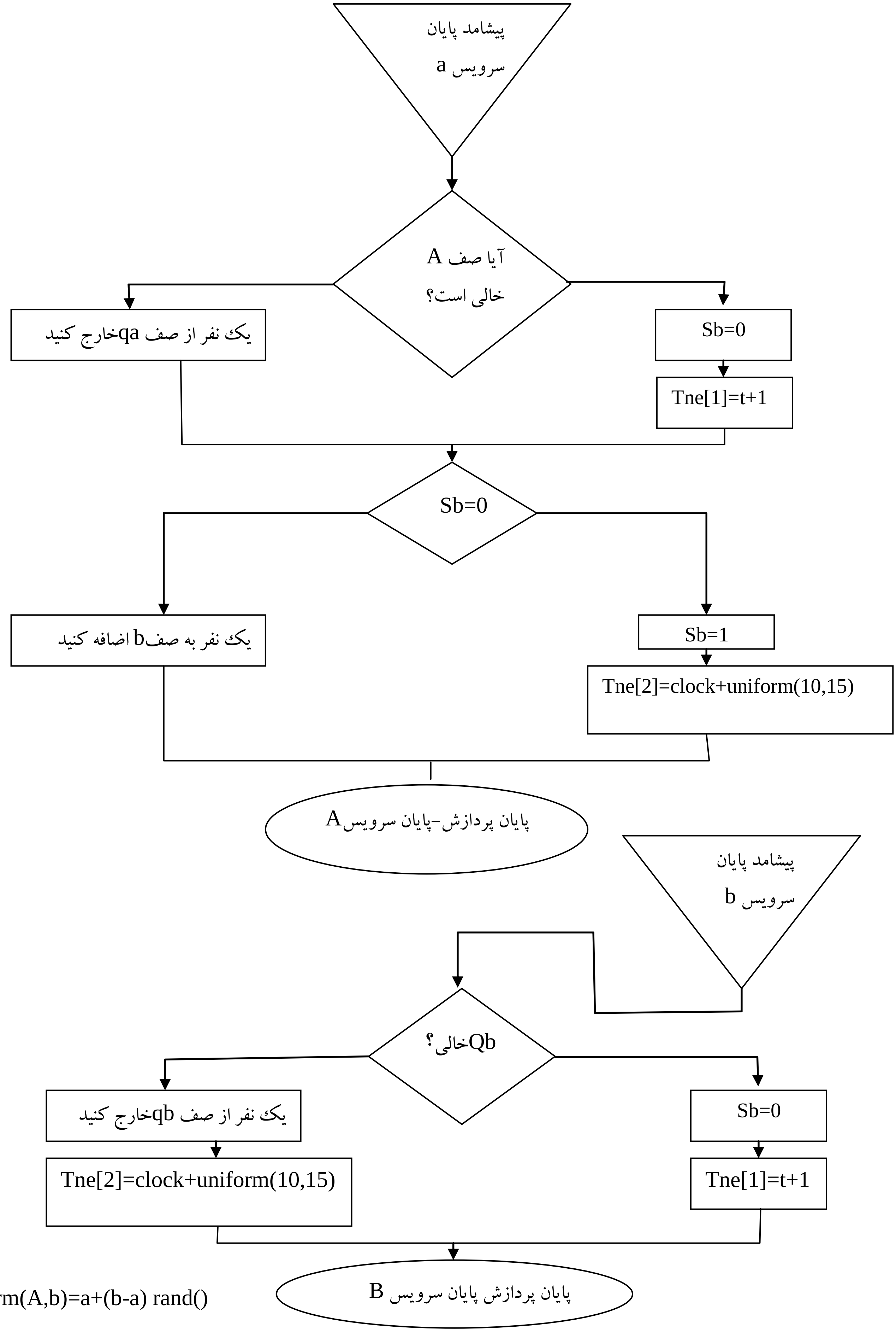
۳)براس تولید یک عدد تصادفی یکنواخت (uniform) در بازه (a,b) از فرمول $x = a + (b-a)rand()$ استفاده می کنیم که تابع rand() که جزئیاتش بعدا توضیح داده می شود تابعی است که در اکثر کامپایلرها موجود است و یک عدد تصادفی بین ۰و۱ تولید می کند

۴)مقدار خانه های tne را برای سرویس دهنده بیکار برابر t+1 می گیریم

۵) برای تعیین وقوع اولین پیشامد بعدی از جدول tne ، minimomمقدار


شروع
مقدار دهی اولیه به متغیرها
Clock=min{tne}
Code=اندیس{Min}
clock≤T
No
پایان
Yes
code
0
پیشامد ورود
1
پیشامد پایان سرویس A
2
پیشامد پایان سرویس B

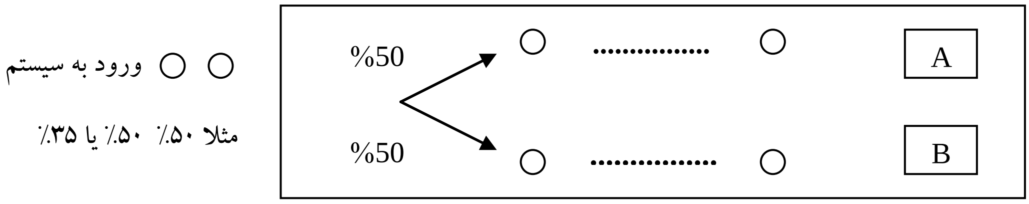

پیشامد ورود
Tne[0]=clock+uniform(5,10)
Sa=0
یک نفر به صف اول اضافه کنید
Sa=1
Tne[1]clock+uniform(6,11)
پایان سرویس از سرویس دهنده a
پایان



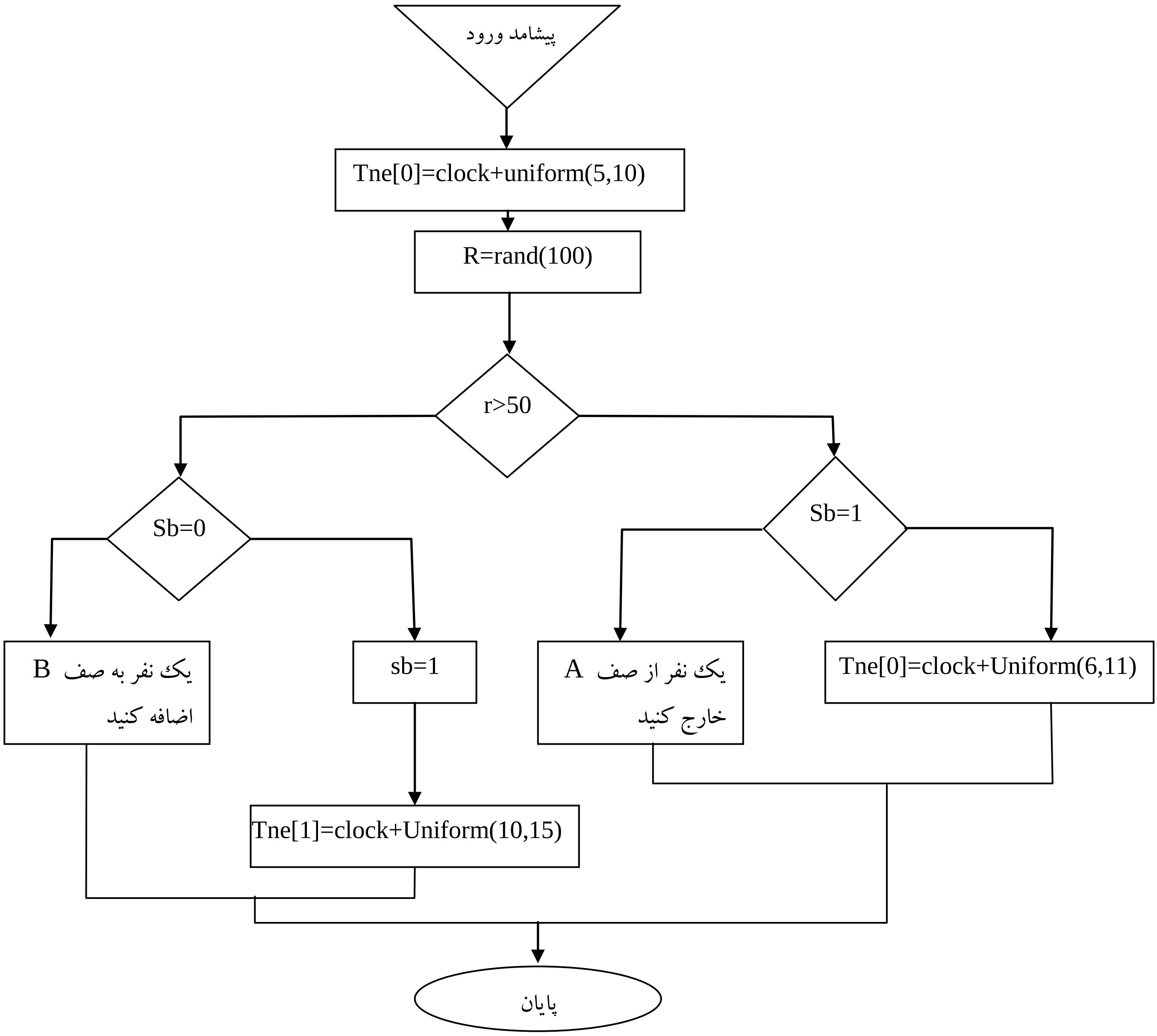
Uniform(A,b)=a+(b-a) rand()

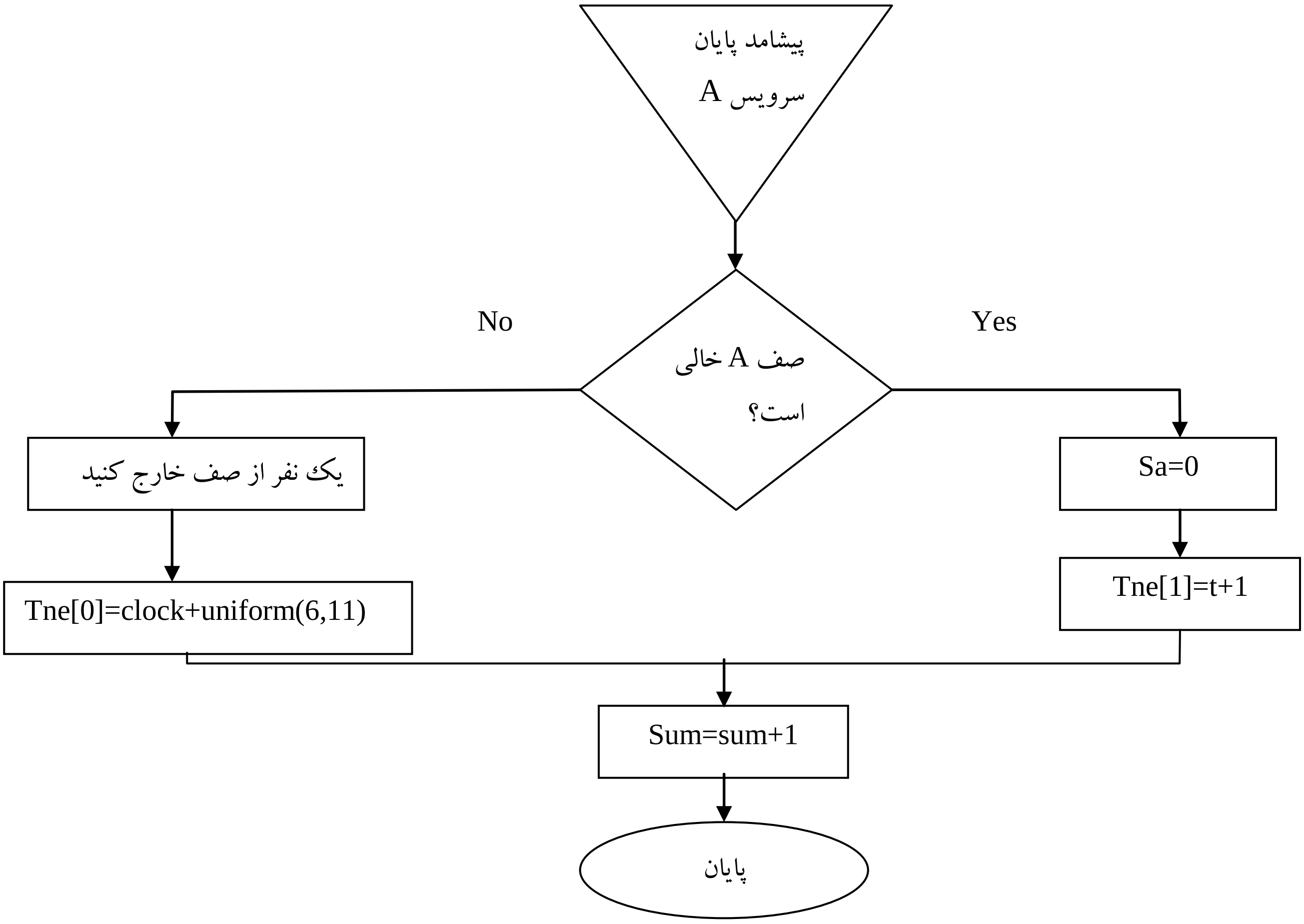
فرض کنید در مثال ۱ مشتریان به جای یک صف دوصف تشکیل دهند به این ترتیب که وقتی یک مشتری وارد سیستم شد به طور کاملاتصادفی وارد سیستم شدبه طور کاملا تصادفی وارد یکی از صفتهایA یا B شود پس از دریافت سرویس از هر سرویس دهنده سیستم را ترک کند این سیستم را شبیه سازی کنید وبا سیستم قبلی مقایسه نمایید .در ضمن تعداد یکسانی را که سرویس دریافت میکند تعیین کنید.

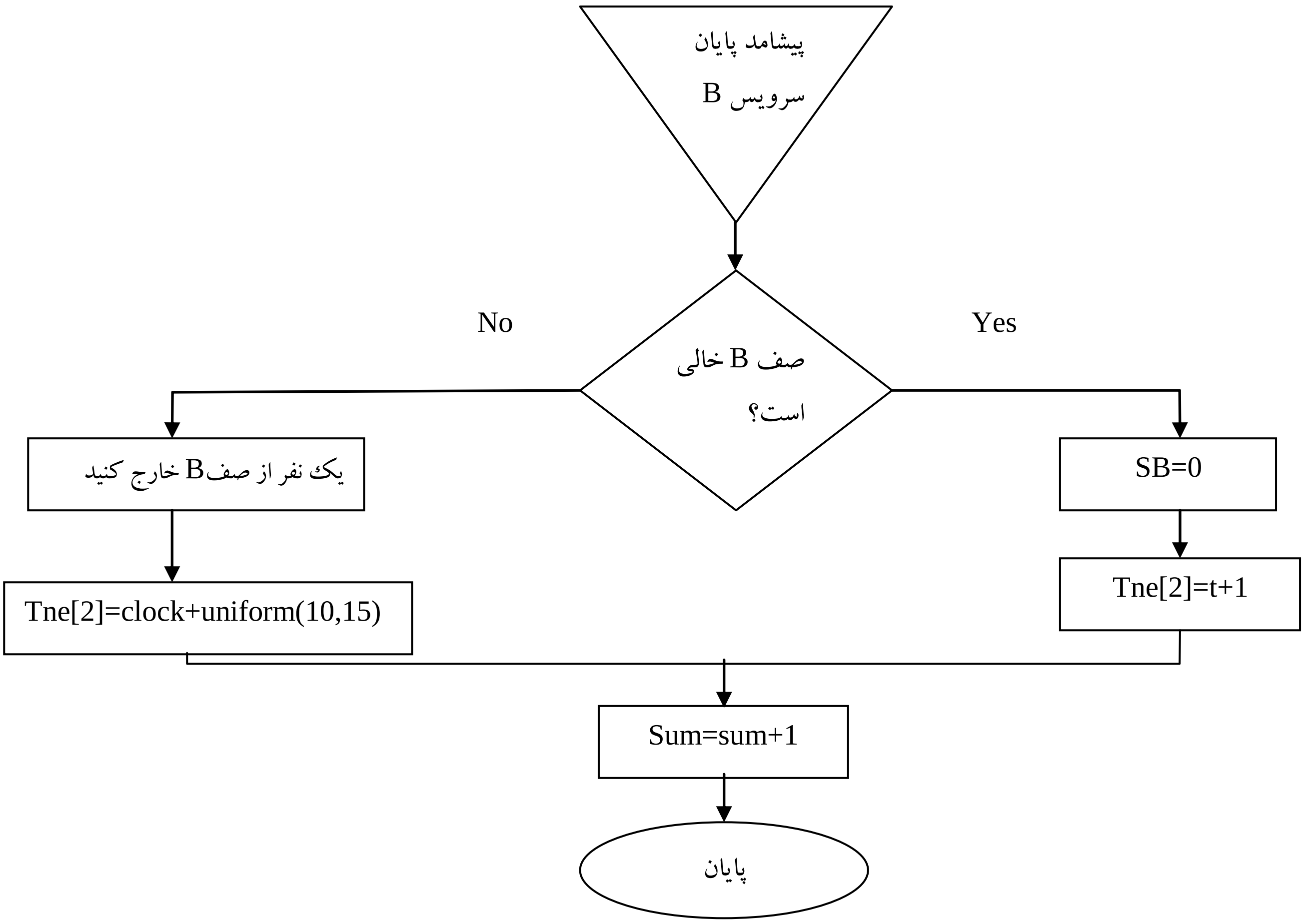
مثال ۲)



حل :کلیه متغیرها مانند مثال قبل است

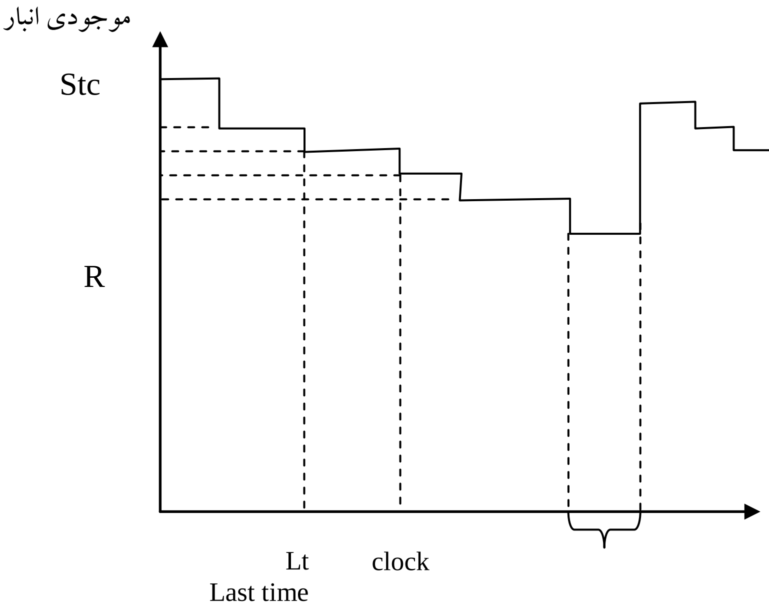



پیشامد پایان
سرویس A
No
Yes
صف A خالی
است؟
یک نفر از صف خارج کنید
Sa=0
Tne[1]=t+1
Tne[0]=clock+uniform(6,11)
Sum=sum+1
پایان


پیشامد پایان
سرویس B
No
Yes
صف B خالی
است؟
یک نفر از صفB خارج کنید
SB=0
Tne[2]=t+1
Tne[2]=clock+uniform(10,15)
Sum=sum+1
پایان

شبیه سازی سیستم انبار:

انباری را در نظر بگیرید که کالای آن واحد به واحد مورد تقاضا قرار میگیرد. با هر تقاضا چنانچه حداقل یک واحد کالا در انبار موجود باشد به متقاضی داده می شود در غیر این صورت مشتری بدون اینکه منتظر بماند بر می گردد. این از دست دادن مشتری باعث زیان سیستم خواهد گردید از طرف دیگر نگهدار ی کالای زیاد در انبار باعث نوعی زیان مثل راکد گذاشتن سرمایه و مخارج دیگری نظیر هزینه انبار داری و هزینه نگهبانی و غیره می شود. برای محاسبه ی یک سطح مناسب کالا در انبار مدیریت سیستم تصمیم می گیرد آنرا شبیه سازی کند. سیاست خرید کالا برای این انبار بدین گونه است که هر موقع موجودی انبار به سطح R تنزل یابد سفارش خرید Q واحد کالا توسط مدیریت داده می شود که بعد از یک مدت تصادفی به انبار می رسد.



(زمان رسیدن کالا به انبار یک زمان تصادفی است)

زمان از دست دادن مشتری برابر با p برای هر واحد کالا و مخارج هر سفارش برابر با A . همچنین فرض کنید زیان و مخارج نگهداری یک واحد کالا برای یک واحد زمان برابر با H باشد.اگر i کل حجم موجودی انبار نسبت به زمان با مقیاس واحد کالا و واحد زمان باشد و نیز S تعداد تقاضاهای از دست رفته به دلیل کمبود موجودی همچنین N تعداد سفارشات در T واحد زمان باشد مجموع زمان و مخارج مورد انتظار این سیستم در T واحد زمان عبارتست از :

$$\underbrace{C(R,Q)}_{\text{هزینه کل}} = \underbrace{H * E(i/T)}_{\text{هزینه نگهداری}} + P * \underbrace{E(S/T)}_{\text{هزینه برگشت مشتری(زیان)}} + A * \underbrace{E(N/T)}_{\text{هزینه سفارش}}$$

در این فرمول $E(x)$ همان امید ریاضی است $E(x) = \sum x\, f(x) = \int x\, f(x)$

رابطه فوق نشان می دهد که مخارج سیستم تابعی از R و Q است لذا منظور از شبیه سازی این سیستم بدست آوردن مقادیر مناسبی برای R و Q است بطوریکه هزینه سیستم minimum شود .

تذکر: همان طوری که از توضیحات فوق برمی آید در این سیستم دو عامل تصادفی وجود دارد که یکی فاصله زمانی بین تقاضاهاست و دیگری فاصله زمانی بین سفارش کالا و رسیدن آن به انبار. به همین دلیل می توانیم بگوییم این سیستم یک سیستم احتمالی است یا به عبارت دیگر مقدار مخارج سیستم هم احتمالی است.

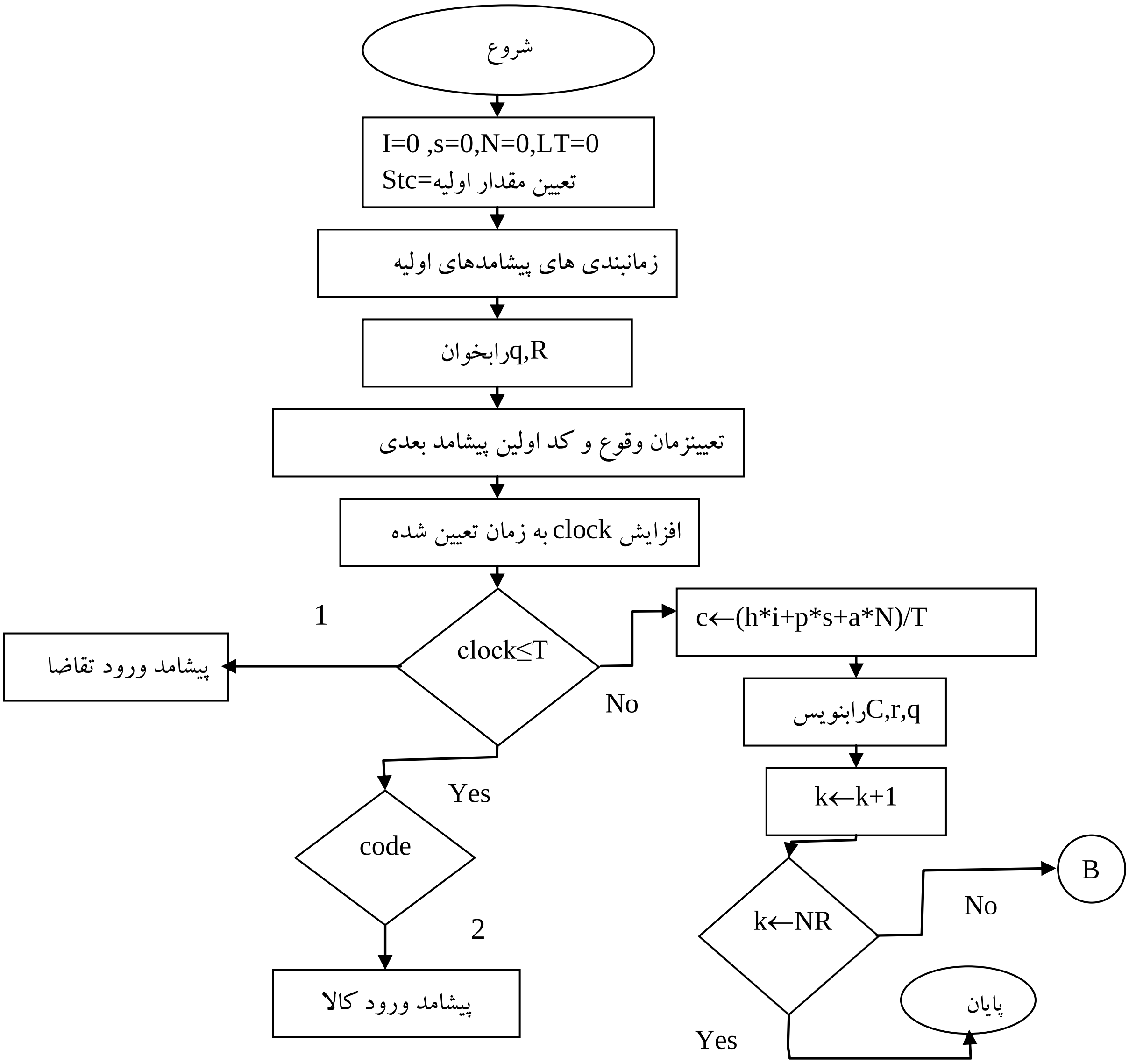
بنابراین در مدل شبیه سازی این سیستم دو پیشامد داریم:

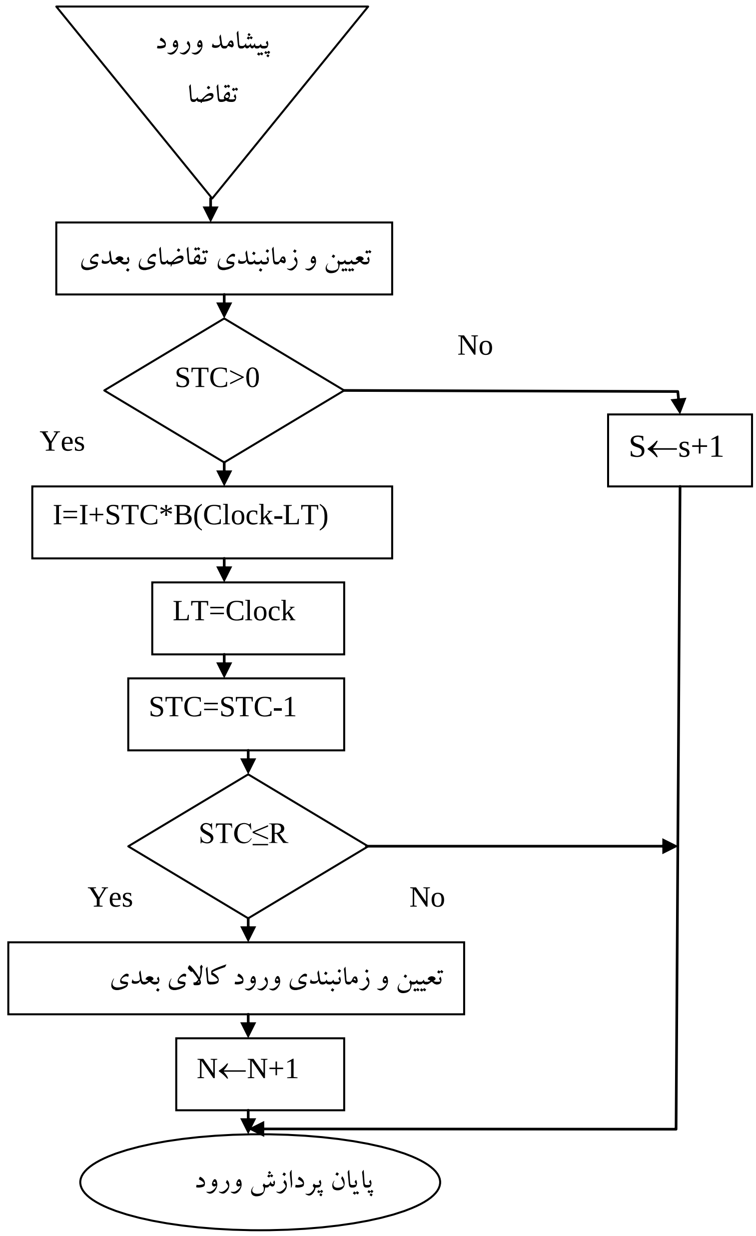
۱) **پیشامد ورود تقاضا** ← که در صورت مثبت بودن موجودی انبار باعث کاهش موجودی به اندازه یک واحد خواهد گردید و اگر موجودی بعد از این کاهش کمتر از R گردد یک سفارش برای خرید کالا داده می شود.

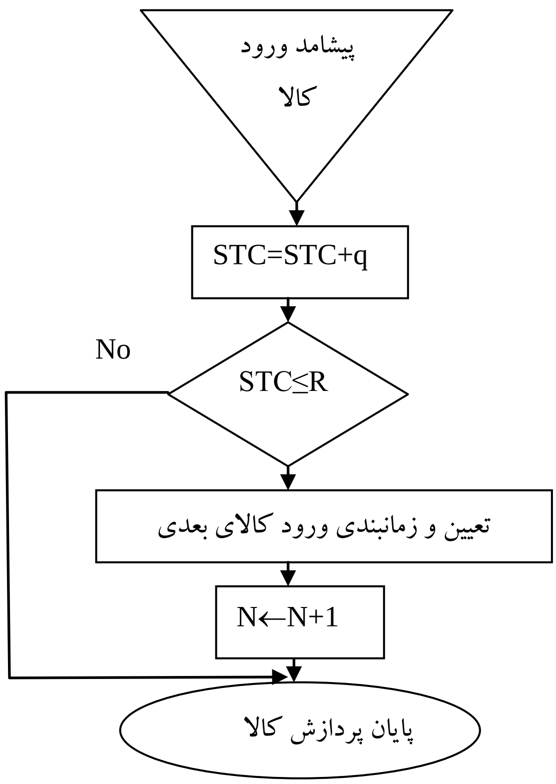
۲) **پیشامد ورود کالا به انبار** ← که بعد از ورود کالا موجودی انبار به اندازه Qواحد افزایش می یابد.

تذکر: در هر بار اجرای مدل این سیستم یکمجموعه مقدار R و Q دریافت می شود و مخارج سیستم به ازای این دو مقدار در پایان اجرا محاسبه می شود بنابراین برای یافتن بهترین مقادیر R و Q لازم است چندین بار مدل را اجرا کنیم تا بین اجراهای مختلف مناسبترین مدل (مدلی که کمترین هزینه را دارد) برگزینیم در ضمن تعداد اجراها (NR) و مدت شبیه سازی (T) و پارامترهای A , P, H از قبل مشخص است.

متغیرها	شرح	مقدار اولیه
Clock	ساعت شبیه سازی	۰
T	مدت کل شبیه سازی	دلخواه
NR	تعداد کل اجراهای مدل	دلخواه
N	تعداد سفارشات	۰
k	شمارنده تعداد سفارشات	۰
s	تعداد تقاضاهای برگشتی	۰
I	انتگرال سطح موجودی انبار نسبت به زمان	۰
C	مخاج سیستم در واحدزمان	–
Code	کد پیشامدها ، ۱ =ورود تقاضا ۲ = ورود کالا	–
STC	سطح موجودی انبار	دلخواه
LT	زمان اجرای آخرین تقاضای قبلی	–




پیشامد ورود
تقاضا
تعیین و زمانبندی تقاضای بعدی
STC>0
No
Yes
S←s+1
I=I+STC*B(Clock-LT)
LT=Clock
STC=STC-1
STC≤R
Yes
No
تعیین و زمانبندی ورود کالای بعدی
N←N+1
پایان پردازش ورود


پیشامد ورود
کالا
STC=STC+q
No
STC≤R
تعیین و زمانبندی ورود کالای بعدی
N←N+1
پایان پردازش کالا

تذکر: مدلهایی تاکنون طراحی کردیم بر اساس جدول زمان بندی نوشته شده اند که این روشهای بکار گرفته شده را روشهای زمانبندی پیشامدها می گویند. این روشها اساس زیربنای شبیه سازی را تشکیل می دهند و درک شبیه سازی بدون فراگیری این روشها (روشهای زمانبندی پیشامدها) غیر ممکن است.البته این روش پایه مدلهای کامپیوتری است که با کد نوشته میشود مثل Fortran , pascal , C++ , ... ,C

در ضمن نرم افزارهایی چون Gpss, Slamp , Simula و ... نیز با وجود دارا بودن توابع تسهیل کننده برنامه نویسی می توانیم بگوییم تا حدود زیادی (نه ۱۰۰٪) بر اساس همین روشها کار می کند.

اما روش دیگری که در مدل سازی مرسوم است به روش **پردازش فرآیندها** معروف است .

این روشها اساس کار نرم افزارهایی مثل Arena و حتی تا حدودی اساس کار Gpss و غیره هستند.

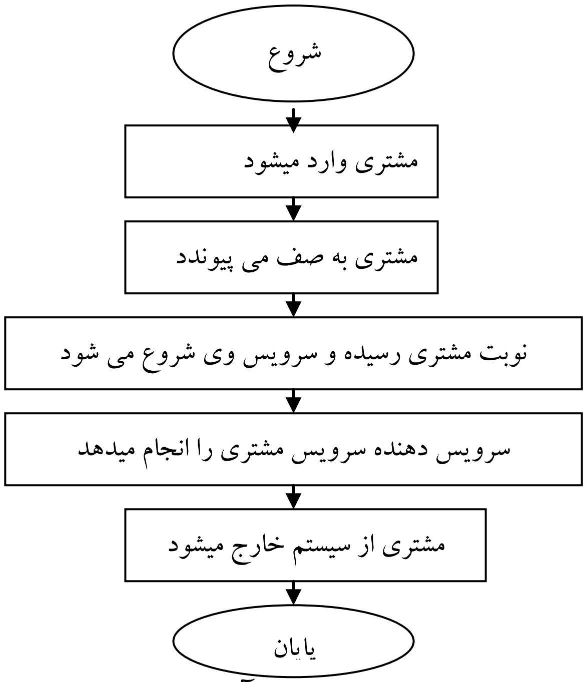
تعریف ۱ ← یک رشته پیشامد متوالی از نظر زمانی را که به طریقی به هم مرتبط بوده و یک نتیجه را تولید می کند یک فرآیند (procces) می گویند مثلاً مجموعه پیشآمدهایی که از لحظه ورود یک مشتری تا لحظه خروج همان مشتری از سیستم رخ می دهند , تشکیل یک فرآیند می دهند.

تعریف ۲ ← مجموعه عملیاتی که برای تبدیل وضعیت یک شیء از یک حالت به حالت دیگر انجام می شود را فعالیت یا Activity می گوییم.

تعریف ۳ ← هر مدل شبیه سازی با روش پردازش فرآیندها بجای تعیین و پردازش تغییرات حاصل از پیشآمدها شامل مراحل فرآیندها می باشد. به عبارت دیگر یک مدل شبیه سازی با روش پردازش فرآیندها شامل مراحل انجام یک یا چند فرآیند می باشد.

مثلا یک سیستم صفی تک سرویس دهنده را در نظر بگیرید , مجموعه مراحلی که یک مشتری از بدو ورود تا خروج در این سیستم طی می کند یک فرآیند است و مدل شبیه سازی این سیستم در روش پردازش فرایندها فقط شامل مراحل انجام کار است.

*فلوچارت زیر را ببینید:



همانطور که فلوچارت فوق نشان می دهد ،در مدل بندی به روش پردازش فرآیندها به هیچ وجه وارد جزئیات نمیشویم.بلکه فقط به مراحل اجرای فرآیندها توجه میکنیم.

نگاهی به آمار و کاربرد آن در شبیه سازی:

همانطور که در بخشهای قبل دیدیم تاکنون باچگونگی مدلسازی انواع سیستم ها آشناشدیم و دیدیم که مفاهیم شبیه سازی ارتباط نزدیکی به مفاهیم آماری نظیر موارد زیر دارد:

۱)تولید اعداد تصادفی با توزیع معلوم

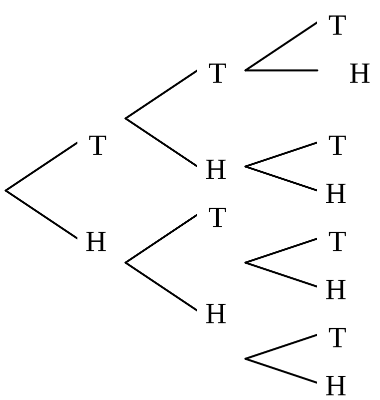
۲)نمونه گیری و تعیین توزیع های احتمال و برآورد پارامترهای آنها

۳)تجزیه و تحلیل نتایج شبیه سازی

پارامتر ها:

تعریف ۱)مجموعه کلیهنتایج فرآیند یا آزمایش تصادفی رافضای نمونه گویند و با Ωنشان می دهند

مثلاآزمایش ۳بار پرتاب یک سکه را در نظر بگیرید



Ω { TTT,TTH,THT,THH,HTT,HTH,HHT,HHH

تعریف ۲)متغیر تصادفی ← هر متغیر تصادفی تابعی است که بهر عضو Ω (فضای نمونه)یک عدد حقیقی را نسبت می دهد .مثلا اگر در مثال فوق تعریف کنیم

x:تعداد شیرها در سه بار پرتاب

X(TTT)=0
X(TTH)=1
X(THT)=1
.
.
X(HHH)=3

$X:\Omega \to \{0,1,2,3\} \subseteq R$

تعریف ۳)چنانچه فضای نمونه یک آزمایش تصادفی دارای تعداد محدودیا شمارزش پذیر عضو باشد آن را یک فضای نمونه گسسته یا متغیر تصادفی X در مثال بالا با توجه به محدود و شمارش پذیر بودن Ω یک متغیر تصادفی گسسته است.

تعریف۴)چنانچه فضای نمونه یک آزمایشتصادفی نامحدود یا شمارش ناپذیر باشد آن را فضای نمونه پیوسته و متغیر های تصادفی کهروی آن فضا تعریف می شوند.متغیرهای تصادفی پیوسته خواهد بود.

تعریف ۵)اگر متغیر تصادفی گسسته X بتواند در نقاط گسسته Xn..,X2,X1مقادیر P(X=x1)،P(X=x2)،P(X=xn) را به خود بگیرد در اینصورت مجموعه زیر به تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X معروف است و معمولا بور خلاصه این تابع چگالی احتمال را باP(X=x)نشان میدهند.

$\{(Xi,P(X=xi)|Xi=x1,\ldots,xn\}$

اما اگر x یک متغیر تصادفی پیوسته باشد عموما این تابع چگال یاحتمال را باf(x)نشان می دهند.

تعریف ۶)تابع گسسته Px(t) با تعریف

$$Px(t) = (x \le t) = \sum_{X \le t} P(X = x)$$

به تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی گسسته Xمعروف است همچنین F(x),t باتعریف

$$F_X(t) = F(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

به تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته x نیز گویند.

تذکر:ویژگی مهم توابع چگالی احتمال←

$$\sum_{i=1}^{n} p(X = xi) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

نتیجه ۱)با توجه تعریف

$$f_x\, t = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \quad \text{یا} \quad F_x(t)\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

وقضیه اساسی دیفرانسیل و انتگرال داریم :

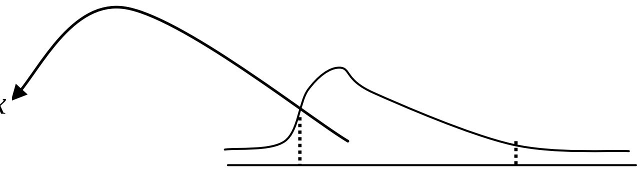
$$f^{-}(x) = f(X) \quad \text{یا} \quad f(X) = \frac{df_x(t)}{dx}$$

نتیجه ۲)با توجه نتیجه۱

معمولامتغیر تصادفی را با $f_X(x)$ یا با $f(x)$ مشخص می کنند که طبق آن رابطه اگر یکی از این دورا داشته باشیم دیگری نیز قابل محاسبه است.اگر تابع توزیع تجمعی موجود باشد

$$p(a \le X \le b) = p(a < X < b) = p(X < b) - p(X < a) = F_x(b) - F_x(a)$$

$$= \int_a^b f(x)dx$$



آشنایی با چند تابع توزیع یک متغیره :

۱)توزیع یکنواخت یا uniformگسسته:

$$p(X = x1) = p(x = x2) = \ldots = p(x = xn)$$

فرض ←متغیر تصادفی x مقادیر x1…xn را با احتما های یکسان بگیرد.با توجه به رابطه مهم

داریم : $\sum_{i=1}^{n} p(X, xi) = 1$

$$np = (X = xi) = 1 \Rightarrow p(X = xi) = \frac{1}{n}$$

بنابراین: $p(X = x)\begin{cases} \frac{1}{n} & x = x1, x2, ..x3 \\ 0 & 0w \end{cases}$

لذا هر متغیر تصادفی با تابع توزیع فوق را یک متغیر تصادفی یکنواخت گسسته میگویند.

۲)توزیع یکنواخت پیوسته:

تعریف←می گوییم متغیر تصادفی X داری توزیع یکنواخت پیوسته در بازه (a,b) است و آن را با نماد X~u(a,b) نشان میدهیم

هر گاه تابع چگالی احتمال بصورت زیر باشد .

$$\begin{cases} \frac{1}{b-1} & a < x < b \\ 0 & 0w \end{cases}$$

که در این صورت تابع توزیع تجمعی آن بصورت زیر بدست می آید:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x<b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$$

نکته:اگر x~u(a,b)باشد:

$E(x)=\dfrac{a+b}{2}$ امید ریاضی

$\operatorname{var}(x)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$ واریانس

۳)توزیع نمایی (expanential)

میگوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر λاست مینویسیم x~E(λ) در صورتیکه تابع چگالی احتمالxبصورت زیر باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda} \quad e^{-\frac{x}{\lambda}} \to x>0:\lambda>0\\ 0 \quad 0w\end{cases}$$

تذکر:در آمارثابت شده است که اگر متغیر تصادفی X طول عمر یک قطعه در بخشهای صنعتی باشد X دارای توزیع نمایی است.

تذکر:اگر X دارای توزیع نمایی با پارامتر λباشد

$$if \qquad x\sim E(\lambda)\Rightarrow\begin{cases}E(x)=\lambda\\ \operatorname{var}(x)=\lambda^2\end{cases}$$

٤)توزیع کای دو(X^2)

متغیر تصادفی x دارای توزیع X^2 است هر گاه تابع چگالی احتمال آن بصورت زیر است.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n-2}{2}}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

که در آن $\Gamma(\alpha)$ برابر است با:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-y}y^{a-1}dy$$

پارامتر n در این تعریف درجه آزادی متغیر تصادفی Xنامیده میشود و می گوییم متغیر تصادفی xداری توزیع X^2 با n درجه آزادی است.در ضمن تابع توزیع تجمعی xعبارت است از :

$$fx(t) = p(x \le t) = \begin{cases} \int_0^t \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

۵)توزیع نرمال :می گوییم X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و δ^2است هرگاه تابع چگالی احتمال آن بصورت زیر باشد.

$$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2\delta^2}}(x-\mu)^2$$

که در این صورت می نویسیم $x \sim N(\mu - \delta^2)$

یاد آوری: اگر $\mu = 0, \delta^2 = 1$ می گوییم x دارای توزیع نرمال استاندارد است .که در این صورت:

$$f(x)\frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

۶)توزیع بتا : می گوییم X دارای توزیع بتا با پارامترهای a,b است هرگاه تابع چگالی احتمال آن بصورت

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \begin{cases} 0 < x < 1 \\ a > 0, b > 0 \end{cases}$$

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a=b)} \qquad \Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-y} y^{a-1} dy$$

۷)توزیع t:

می گوییم متغیر تصادفی x دارای توزیع t با n درجه آزادی استهرگاه تابع چگالی و تجمعی آن بصورت زیر باشد.

$$fx(x) = \frac{1}{\sqrt{n\Pi}} * \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} * (1 + \frac{x^2}{n}) \frac{-n+1}{2}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx \qquad -\infty < x < \infty$$

۸)توزیع ویبال(wei bull):

X دارای توزیع ویبال است هر گاه :

تابع چگالی $fX(x) = \begin{cases} \alpha\lambda^\alpha x^{\alpha-1} - (\lambda\alpha)^\alpha & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

تابع توزیع تجمعی $fX(x) = \int_0^x f(x)dx$

۹)توزیع مثلثی(triangle):

$$fX(x)=\begin{cases}\dfrac{F(x-c)}{(b-a)(c-a)} & a\le x\le b\\ \dfrac{2(c-x)}{(c-b)(c-a)} & b\le x\le c\\ 0 & 0w\end{cases}\qquad x\sim triangle(a,b,c)$$

تابع توزیع تجمعی
$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} & a\le x\le b\\ 1-\dfrac{(c-x)^2}{(c-a)(c-b)} & b\le x\le c\end{cases}$$

۱۰)توزیع گاما(Γ) با پارامترهای α,β:

متغیر تصادفی x دارای توزیع گاماست هرگاه:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{a-1}e^{-\frac{x}{b}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$F_x(x)=\begin{cases}\int_0^x f(x)dx\end{cases}$$

۱۱)توزیع لوگ نرمال(log normal)

اگر x دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس δ^2 باشد و آنگاه $y=e^x$ دارای توزیع log normal با میانگین $e^{\mu+\frac{\delta^2}{2}}$ و واریانس $(e-1)e^{2\mu+\delta^2}$است.

۱۲)توزیع پواسن:

تغیر تصادفی x دارای توزیع پواسن با پارامتر λاست هرگاه:

$$p_x(x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda x}}{x!}\qquad for x=0,1,2,\ldots.$$

$$p(x)=\sum_x\frac{\lambda^x e^{-\lambda x}}{x!}$$

۱۳)توزیع برنولی:

X دارای توزیع برنولی است هر گاه:

$$p_x(x)=p^x(1-p)^{1-x}\qquad x=0,1,\ldots$$

$o\le p\le 1$ احتمال پیروزی در یک آزمایش تصادفی $\longleftarrow$ P

۱۴)توزیع دو جمله ای

$$p_x(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\ldots,n$$

$p_x(x):$ احتمال X پیروزی در n آزمایش

P: احتمال پیروزی در یک آزمایش $0 \le p \le 1$

می دانیم اعداد تصادفی در سیستم های مختلف شبیه سازی مدلسازی آنها نقش بسزایی دارند .از ساده ترین کاربردهای آنها می توانیم فاصله زمان بین ورود مشتریان به سیستم و نیز زمان سرویس دهی به مشتریان را نام ببریم که هر یک از اینها خود متغیرهای تصادفی اند که بسته به نوعسیستم از یک تابع توزیع خاص پیروی می کنند .اگرچه اکثر نرم افزارهای شبیه سازی با معلوم بودنتابع توزیع عدد تصادفی را تولید می کنند ولی ذکر تئوری نحوه تولید نیز ضروری است.

بطور کلی نحوه ی تولید هر عدد تصادفی با کمک توزیع یکنواخت u[0,1] صورت می گیرد بنابراین در اولین قدم از شبیه سازی باید بدانیم هر عدد تصادفی نوع u[0,1] چگونه تولید می شود سپس با استفاده از یک تابع توزیع داده شود و آنرا به حالت های دیگر تبدیل کنیم همانطوری که قبلا گفتیم اگر X دارای توزیع یکنواخت با پارامترهای 0,1 باشد

$$x \sim u[0,1]$$

$$f_x(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & 0w \end{cases}$$

$$\mu_x = E(x) = \int_0^1 x.1dx = \frac{1}{2}$$

$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \int_0^1 x^2 * 1dx - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{12}$$

روشهای تولید اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت uni[0,1]:

۱)**روش میان مربعی:** ← ابتدا با توجه به تعداد ارقامی که مایلید اعداد تصادفی شما داشته باشد یک عدد با همان تعداد ارقام بطور پیش فرض و دلخواه (ترجیحاً عدد اول) انتخاب می کنیم سپس آن عدد را به توان ۲ می رسانیم مثلا اگر بخواهیم یک عدد تصادفی uni[0,1] با d رقم اعشار تولید کنیم ابتدا یک عدد اول d رقمی در نظر می گیریم معمولاً آنرا seed (دانه) می نامند. اگر نتیجه به اندازه 2d رقم داشت از آن d رقم وسط را برمی گزینیم سمت چپ آن ممیز قرار می دهیم. اما اگر عدد ما کمتر از 2d رقم داشت ابتدا تعدادی صفر در سمت راست آن قرار می دهیم بطوریکه تعداد ارقام نتیجه به 2d برسد سپس از آن d رقم وسط را انتخاب کرده این کار را هر چند

باری که بخواهیم تکرار می کنیم. ⁕ مطلوبست 5 عدد تصادفی چهار رقمی از نوع [0,1] u که عدد شروع آن 7182 باشد.

$Seed=Z_i=7182$

i	Z_i	U_i	Z_i^2
0	7182	___	51581124
1	5811	0.5811	33767721
2	7677	0. 7677	58936329
3	9363	0. 9363	87665769
4	6657	0. 6657	44315649
.	.	.	.
.	.	.	.

تذکر: اشکال اساسی این روش این است که بعضی اوقات به ازای بعضی seed هایی که انتخاب می کنیم دنباله U_i میرا میشود. (کوچک می شود به سمت صفر می رود.)

2) روش حاصلضرب میانی ← در این روش نخست دو عدد را بعنوان seed در نظر می گیریم (اعداد d رقمی)d تعداد ارقام اعشار اعداد یکنواخت است. ترجیحاً این عدد را اول یا فرد در نظر می گیریم. دو عدد اول را Z_0 , Z_0' در نظر می گیریم. حاصلضرب $Z_1=Z_0'*Z_0$ را بدست می آوریم. حال از این عدد d رقم وسط را انتخاب می کنیم که با گذاشتن یک ممیز در سمت چپ آن به یک عدد از نوع [0,1] u می رسیم. این عمل را بر روی Z_1 و Z_0' تکرار می کنیم.

⁕ مطلوبست تولید 3عدد تصادفی چهار رقمی از نوع [0,1] u به روش حاصلضرب میانی و با این فرض که seed های اولیه آن عبارت باشند از : $Z_0=2938$, $Z_0'=7229$

Z_0	Z_0'	$Z_1=Z_0*Z_0'$	Z_1'	U
(1)2938	7229	21238802	2388	0.2388
(2)7229	2388	17262852	2628	0.2628
(3)2388	2628	62756640	7566	0.7566

۳) روش ضریب ثابت ← این روش نیز با داشتن یک مقدار اولیه به نام X_0 که همان نقش seed را بازی می کند و یک مقدار ثابت مثل عدد k شروع می شود.در هر تکرار kX_0 را بدست می آوریم و آنرا V_1 می نامیم. d رقم وسط V_1 را بدست آورده با گذاشتن اعشار پشت آن به یک عدد از نوع [0,1] u می رسیم . سپس این فرایند را روی همان عدد d رقمی تکرار می کنیم. ⁕ اگر $X_0=7223$ و $k=3989$

i	X_i	$V_i = K.X_i$	U_i
0	7223	28798101	0.7981
1	7981	31820247	0.8202
2	8202		
.	.		
.	.		

تولید اعداد تصادفی با توزیع دلخواه:

تا کنون فرا گرفتیم که چگونه می توان اعدا تصادفی یا توزیع یکنواخت در بازه ۱و۰ تولید کرد اما در این بخش خواهیم با استفاده از اعدا کنواخت تولید شده در بازه ۱و۰ به اعداد تصادفی با توزیع مورد نظر برسیم اینکار روش های مختلفی دارد که عبارت اند از:

۱)روش تبدیل عکس
۲)روش استنتاج ریاضی
۳)روش رد کردن

۱)روش تبدیل عکس←این روش برای توزیع هایی بکار می رود که اولا تابع توزیع تجمعی آن یعنی f(x) شناخته شده باشد وثانیا محاسبه وارون آن یعنی $F^{-1}(x)$ امکان پذیر باشد قبل از اینکه به اساس این روش بپردازیم یاد آوری می کنیم که $F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ و $0 \le F(x) \le 1$

اما اساس روش تبدیل عکس:

فرض:X یک متغیر تصادفی با تابع چگال $f_x(x)$ و تابع توزیع تجمعی f(x) باشد.حال اگر قرار دهیم u=f(x)(u متغیر تصادفی)ولا طبق قوانین احتمال میتوان نشان داد(تابع چگالی متغیر تصادفی جدید) (2) $f_u(u)=\dfrac{dx}{du} f_x(X)$ از طرفی u=f(x) که $0 \le u \le 1$ و

$$du = f^{-}(x)dx \quad \downarrow \quad f_{x(X)}$$

$$\Rightarrow du = f_X(x) \Rightarrow f_X(x) = \frac{du}{dx} \qquad (2) \Rightarrow 1{,}2 \to f_u(u)=1 \qquad 0 \le u \le 1$$

نتیجه میشود متغیر تصادفی u توزیع یکنواخت روی بازه ۰و۱ دارد.

نتیجه← اگر X دارای تابع چگالی $f_x(x)$ و تابع توزیع تجمعی f(X) باشد با توجه به معادله $\overset{*}{u = F(u)}$ و اینکه u دارای توزیع یکنواخت در بازه زمانی ۰و۱ است بنابراین می توانیم بگوییم چنانچه یک عدد تصادفی یکنواخت تولید کنیم وبه جای a و در معادله * قرار دهیم و در صورتی که بتوانیم * را از معادله بدست بیاوریم (F^{-1} وجود داشته باشد)پس $x=f^{-1}(u)$ خواهد بود که این X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی $f_x(x)$ و تابع توزیع تجمعی f(X) است.

۱-توزیع یکنواخت [a,b](اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت [a,b])

می دانیم اگر x دارای توزیع یکنواخت در بازه [a,b]باشد.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & a \ge b \end{cases}$$

$$u=f(x) \qquad u=\frac{x-a}{b-a} \Rightarrow x = a+(b-a)u$$

X:عددی تصادف با توزیع یکنواخت

U:عددی تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه[0,1]

```
Float uniform (int a,int b)
{       float u;
U=random(100)/100.0;
Return(a+(b-a)u);
```

۲)اعداد تصادفی با توزیع مثلثی:

گفتیم: $F(x)=\begin{cases}\frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a\le x\le b\\ \frac{2(c-x)}{(c-b)(c-a)} & b\le x\le c\\ 0 & other\end{cases}$ قرار می دهیم $u=F(x)=\begin{cases}\frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a\le xb\\ \frac{2(c-x)}{(c-b)(c-a)} & b\le x\le c\end{cases}$

که با تبدیل عکس داریم:

$$x=\begin{cases}a+\sqrt{(b-a)(c-a)u} & 0\le u\le \frac{b-a}{c-a}\\ c-\sqrt{c-b)(c-a)(1-u)} & \frac{b-a}{c-a}\le u\le 1\end{cases}$$

```
Float triangle(float a , float b , float c)
{ float u;
U=random(1001/100.0);
If(u<=(b-a)/c-a)
Return(a+sqrt((b-a)*(c-a)*4);
Else
Return(c-sqrt((c-b)*(c-a)*(1-a));
}
```

۳-تولید اعداد تصادفی با توزیع نمایی:

$$f_x(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & 0w\end{cases}$$

$$f(x)=1-e^{-\lambda x}\qquad x\ge 0$$

داریم

$$u=1-e^{-qx}$$
$$\to e^{-\lambda x}=1-u\to -\lambda x=\ln(1-u)$$
$$\to x=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$$

مثال)سه عدد تصادفی با توزیع نمایی و با پارامتر $\lambda = 2$ تولید کنید.

اولا تولید سه عدد تصادفی یکنواخت در بازه $[0,1]$

تولید شده در مثالهای قبل:

$$\mathrm{u1} = 0.2388 \Rightarrow x1 = -\frac{1}{2}\ln(1-0.2388)$$
$$\mathrm{u2} = 0.2628 \Rightarrow x2 = -\frac{1}{2}\ln(1-0.2628)$$
$$\mathrm{u3} = 0.7566 \Rightarrow x3 = -\frac{1}{2}\ln(1-0.7566)$$

تابع آن با c:

```
Float exfon(float L)
{ float u;
U=random((100)/100.0);
Return(1-1/x)*log(1-u));
}
```